

·成果简介·

# 魔方中的科学

李世春

(石油大学(华东)材料系,东营 257061)

[关键词] 魔方,科学模型,科学隐喻

魔方被列为 20 世纪最有影响的 100 项发明之一,魔方不仅仅是一个玩具,魔方可以作为晶体学、群论、晶体电子衍射、夸克、混沌和基因等多种科学领域的模型。

## 1 魔方的起源

三阶魔方虽然是匈牙利人 Rubik 于 1975 年发明的,但是魔方的思想却起源于中国 5000 年前的洛书。洛书奇妙地组合排列了 9 个基本数字,涵盖了自然界周期性和对称性的基本特征,反映出东方哲学思想的精髓。洛书是《周易》的主要来源,而八卦和 64 卦则进一步演化了对称性和周期性的思想。晶体学符号具有八卦符号的内涵,可以描述对称性和周期性,因此,可以描述魔方。

## 2 描述魔方转动的晶体学符号

对于一个  $N \times N \times N$  魔方,共有  $N^3 - (N-2)^3$  个小块,每一个小块都对应一个晶体学的符号,称为方向指数。

当  $N$  为奇数时,最大的方向指数  $h_1 k_1 l_1$  和最小的方向指数  $h_2 k_2 l_2$  分别为

$$h_1 = k_1 = l_1 = \frac{N-1}{2} \quad (1)$$

$$h_2 = k_2 = l_2 = 0 \quad (2)$$

当  $N$  为偶数时,最大的方向指数  $h_1 k_1 l_1$  和最小的方向指数  $h_2 k_2 l_2$  分别为

$$h_1 = k_1 = l_1 = \frac{N}{2} \quad (3)$$

$$h_2 = k_2 = l_2 = 1 \quad (4)$$

当  $N=2$  时,即二阶魔方,由式(3)和(4)得到,  $h_1 = k_1 = l_1 = 1, h_2 = k_2 = l_2 = 1$ 。组合  $h_1 k_1 l_1$  和

$h_2 k_2 l_2$  得到  $\langle 111 \rangle$ , 可演绎出 8 种情况:  $[111], [11\bar{1}], [\bar{1}11], [\bar{1}\bar{1}1], [\bar{1}\bar{1}\bar{1}], [1\bar{1}\bar{1}], [1\bar{1}\bar{1}]$ 。

当  $N=3$ , 即三阶魔方,显然,由式(1)和(2)得到,  $h_1 = k_1 = l_1 = 1, h_2 = k_2 = l_2 = 0$ 。组合  $h_1 k_1 l_1$  和  $h_2 k_2 l_2$ , 得到  $\langle 111 \rangle$ 、 $\langle 110 \rangle$  和  $\langle 100 \rangle$  三种情况。能够演绎出 8 种情形,对应 8 个角块;能够演绎出 12 种情形,对应 12 个边块,能够演绎出 6 种情形,对应 6 个心块。

当  $N=4$ , 即四阶魔方,由式(3)和(4)得到,  $h_1 = k_1 = l_1 = 2, h_2 = k_2 = l_2 = 1$ 。组合  $h_1 k_1 l_1$  和  $h_2 k_2 l_2$ , 得到  $\langle 222 \rangle$ 、 $\langle 221 \rangle$  和  $\langle 211 \rangle$  三种情况。小块的类型及数量确定如下:演绎出 8 种情形,对应 8 个角块;演绎出 24 种情形,对应 24 个边块;演绎出 24 种情形,对应 24 个面块。

当  $N=5$ , 即五阶魔方,由式(1)和(2)得到,  $h_1 = k_1 = l_1 = 2, h_2 = k_2 = l_2 = 0$ 。组合  $h_1 k_1 l_1$  和  $h_2 k_2 l_2$ , 得到  $\langle 222 \rangle$ 、 $\langle 221 \rangle$ 、 $\langle 220 \rangle$ 、 $\langle 211 \rangle$ 、 $\langle 210 \rangle$  和  $\langle 200 \rangle$  六种情况。小块类型及数量确定如下:演绎出 8 种情形,对应 8 个角块;演绎出 24 种情形,对应 24 个第一类边块;演绎出 12 种情形,对应 12 个第二类边块;演绎出 24 种情形,对应 24 个第一类面块;演绎出 24 种情形,对应 24 个第二类面块;演绎出 6 种情形,对应 6 个心块。有了魔方的方向指数,根据魔方方程,原则上可以使用计算机求解  $N$  阶魔方问题。

## 3 描述魔方转动的数学模型

当魔方被转动后,转层内的小块的块位和色位要发生变化,设魔方转动前的状态为  $M$ ,转动后的状态为  $M'$ ,单次转动操作为  $T$ ,则有

国家自然科学基金科普资助项目。

本文于 2003 年 3 月 25 日收到。

$$M' = TM \quad (5)$$

式(5)称为魔方转动方程,描述魔方的整体运动和状态。

实际上,魔方被单次操作时,只有转层内的小块的状态才有变化,非转层内的小块的状态不发生变化。例如,对于三阶魔方,魔方被单次操作转动时,只有4个角块和4个边块的块位和色位发生变化。因此,对于每一次单次操作,只要描述了转层内的小块的运动就足以描述了整个魔方状态的变化。在单次操作的转动后,描述魔方小块运动的方程有两个,一个描述块位变化,一个描述色位变化,即

$$(h'k'l') = T^{-1}(hkl) \quad (6)$$

$$(i',j',k') = T(i,j,k) \quad (7)$$

方程(6)称为块位方程,其中 $(hkl)$ 和 $(h'k'l')$ 是方向指数,前者描述小块转动前的块位坐标,后者描述小块转动后的块位坐标, $T^{-1}$ 为单次操作的逆操作;方程(7)称为色位方程,其中 $(i,j,k)$ 和 $(i',j',k')$ 是固定在小块上的笛卡儿坐标系,前者描述转动前的色位坐标,后者描述转动后的色位坐标。

#### 4 魔方的科学模型作用

对于三阶魔方,共有26个小块,角块的三个色面的交点是角块的特征点;边块的两个色面交线的中点是边块的特征点;心块的中心是心块的特征点。

如果过魔方中心(000)点,垂直 $[hkl]$ 方向把魔方切开,被切过的特征点称为切割斑点。对一定的晶体类型,满足结构因子的切割斑点,就是当电子束沿 $[hkl]$ 方向入射到晶体上产生的电子衍射花样。

物理学的夸克是看不见摸不着找不到的,魔方的夸克却是看得见摸得着的。魔方的夸克就是魔方小块的状态。当一个角块被转动120度时,对应于角块被扭转 $1/3$ 转,这对应于魔方的一个夸克;反方向的扭转对应一个反夸克。当一个角块被转动240度时,对应于角块被扭转 $2/3$ 转,这对应于魔方的另一个夸克。和物理学的夸克一样,魔方的夸克也处于“禁闭”之中,即通过转动操作,不可能实现使仅仅一个角块扭转 $1/3$ 转或者是 $2/3$ 转。物理学的夸克可以组合成现实的基本粒子,魔方的夸克也可以组

合形成实在的魔方态。

魔方的图案是小块排列组合的结果,而导致这种特定图案的操作序列则是转动操作的排列组合。

蛋白质是氨基酸在三维空间的排列组合,而氨基酸又是碱基的排列组合,因此,实质上是碱基的排列组合决定了生成什么蛋白质。

从排列组合的观点看,魔方和基因有许多相似之处。一种天然蛋白质的基因编码是碱基A、T、G、C的排列组合。假设基因序列ATTGCGCATGC-GAGCG对应制造蛋白质 $\alpha$ ,并且赋予其生物功能 $\alpha$ ;基因序列ATTGCGCATGCGTTCCTT对应制造蛋白质 $\beta$ ,并且赋予其生物功能 $\beta$ ;基因序列TCTCTGGCC-CATGC对应制造蛋白质 $\gamma$ ,并且赋予其生物功能 $\gamma$ 。魔方的操作序列和魔方图案有相同的对应关系,例如,操作序列WR(先转动W面,再转动R面)对应魔方图案 $\alpha$ ,操作序列WRY(顺序转动W、R、Y面)对应魔方图案 $\beta$ ,操作序列WRBYS(顺序转动W、R、B、Y、S面)对应魔方图案 $\gamma$ 。

在DNA中,不是所有的碱基排列都能决定氨基酸或蛋白质,有些碱基的排列对制造蛋白质毫无作用,这种DNA片段被称为微随体。微随体的特点是几个或几十个碱基重复排列,研究表明,每个人的微随体的长度各不相同,重复周期也不同。因此,从微随体的特征可以识别微随体的携带者,所谓的DNA指纹或DNA鉴定,其实是微随体的鉴定。魔方的操作序列中也可以插入一些子循环操作序列,插入的子循环操作序列对魔方的循环操作或其它操作没有任何影响。在一些特殊编码中,可以用插入子循环的方法对魔方谱进行标记,这和DNA的微随体有鉴定作用完全一样。

#### 5 结束语

魔方及其转动既能反应对称性,又能反应周期性,因此,凡是具有对称性和周期性的体系,都可以以魔方为模型。此外,魔方的图案是魔方小块的排列组合,因此,凡是具有排列组合特征的体系,同样可以使用魔方作为模型。

### SCIENCE OF RUBIK'S CUBE

Li Shichun

(Department of Materials Science, University of Petroleum, Dongying 257061)

**Key words** Rubik's cube, scientific model, scientific metaphor